Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
3. Klausur

31. Oktober 2023

Zone A Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

1 Stunde

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

5 Seiten

8823 – 7128

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 24]

In dieser Frage sollen Sie einige Eigenschaften einer Kurvenfamilie vom Typ $y = x^3 + ax^2 + b$ untersuchen. Dabei ist $x \in \mathbb{R}$ und a, b sind reelle Parameter.

Betrachten Sie die Kurvenfamilie $y = x^3 + ax^2 + b$ für $x \in \mathbb{R}$, mit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$.

Betrachten Sie zunächst den Fall $a = 3$ und $b \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie durch systematisches Variieren des Wertes von b oder auf andere Weise, die beiden Werte von b, so dass die Kurve $y = x^3 + 3x^2 + b$ genau zwei Schnittpunkte mit der x-Achse besitzt. [2]

(b) Notieren Sie die zugehörigen Werte von b, so dass die Kurve $y = x^3 + 3x^2 + b$ genau

(i) einen Schnittpunkt mit der x-Achse besitzt; [1]

(ii) drei Schnittpunkte mit der x-Achse besitzt. [1]

Betrachten Sie nun den Fall $a = -3$ und $b \in \mathbb{R}$.

(c) Notieren Sie die zugehörigen Werte von b, so dass die Kurve $y = x^3 - 3x^2 + b$ genau

(i) zwei Schnittpunkte mit der x-Achse besitzt; [1]

(ii) einen Schnittpunkt mit der x-Achse besitzt; [1]

(iii) drei Schnittpunkte mit der x-Achse besitzt. [1]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Betrachten Sie für die folgenden Frageteile die Kurve $y = x^3 + ax^2 + b$ für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$.

(d) Stellen Sie sich einen Fall vor, bei dem die Kurve exakt drei x-Achsenabschnitte hat. Geben Sie an, ob sich die einzelnen Nullstellen ober- oder unterhalb der x-Achse befinden. [1]

(e) Zeigen Sie, dass die Kurve an den Punkten $\mathrm{P}(0, b)$ und $\mathrm{Q}\left(-\frac{2}{3}a, \frac{4}{27}a^3 + b\right)$ jeweils die Steigung Null besitzt. [5]

(f) Betrachten Sie die Punkte P und Q für $a > 0$ und $b > 0$.

(i) Finden Sie einen Ausdruck für $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ und bestimmen Sie damit, ob der jeweilige Punkt ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist. [3]

(ii) Bestimmen Sie, ob jeder dieser Punkte oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt. [1]

(g) Betrachten Sie die Punkte P und Q für $a < 0$ und $b > 0$.

(i) Geben Sie an, ob Punkt P ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum ist, und ob er oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt. [1]

(ii) Geben Sie die Bedingungen für a und b an, die bestimmen, wann Q unterhalb der x-Achse liegt. [1]

(h) Beweisen Sie, dass die Kurve $y = x^3 + ax^2 + b$ genau drei Schnittpunkte mit der x-Achse besitzt, wenn $4a^3b + 27b^2 < 0$ gilt. [5]

2. [Maximale Punktzahl: 31]

Bei dieser Frage sollen Sie zunächst Familien von Kurven untersuchen, die jede Kurve einer anderen Kurvenfamilie im rechten Winkel schneiden. Anschließend sollen Sie eine Familien von Kurven untersuchen, die jede Kurve einer anderen Kurvenfamilie in einem spitzen Winkel α schneiden.

(a) Betrachten Sie eine Familie von Geraden L mit der Gleichung $y = mx$, wobei m ein Parameter ist. Jede Gerade der Familie L schneidet jede Kurve einer Kurvenfamilie C im rechten Winkel.

Hinweis: In den Teilen (i), (ii) und (iii) brauchen Sie den Fall $x = 0$ nicht berücksichtigen.

(i) Notieren Sie einen Ausdruck für die Steigung von L in Abhängigkeit von x und y. [1]

(ii) Zeigen Sie damit, dass für die Steigung von C, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$ gilt. [1]

(iii) Zeigen Sie durch Lösen der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$, dass die Kurvenfamilie C die Gleichung $x^2 + y^2 = k$ besitzt, wobei k ein Parameter ist. [2]

Eine Kurvenfamilie besitzt die Gleichung $y^2 = 4a^2 - 4ax$, wobei a ein positiver reeller Parameter ist.

Eine zweite Kurvenfamilie besitzt die Gleichung $y^2 = 4b^2 + 4bx$, wobei b ein positiver reeller Parameter ist.

(b) Betrachten Sie den Fall $a = 2$ und $b = 1$. Skizzieren Sie die Kurven $y^2 = 16 - 8x$ und $y^2 = 4 + 4x$ im selben Koordinatensystem. Beschriften Sie in Ihrer Skizze deutlich jede Kurve und jeden Schnittpunkt mit der x-Achse.

Hinweis: Sie brauchen die Koordinaten eventueller Schnittpunkte der beiden Kurven nicht zu bestimmen. [3]

(c) Zeigen Sie durch gleichzeitiges Lösen von $y^2 = 4a^2 - 4ax$ und $y^2 = 4b^2 + 4bx$, dass diese Kurven sich in den Punkten $\mathrm{M}\left(a-b,\, 2\sqrt{ab}\right)$ und $\mathrm{N}\left(a-b,\, -2\sqrt{ab}\right)$ schneiden. [6]

(d) Zeigen Sie, dass sich die Kurven $y^2 = 4a^2 - 4ax$ und $y^2 = 4b^2 + 4bx$ im Punkt M rechtwinklig schneiden. [5]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Betrachten Sie nun zwei Kurvenfamilien F und G.

Die Steigung von F wird als $f(x, y)$ bezeichnet.

Die Steigung von G wird als $g(x, y)$ bezeichnet.

Jede Kurve der Familie F schneidet jede Kurve der Familie G in einem spitzen Winkel α.

Man kann zeigen, dass gilt:

$$g(x, y) = \frac{f(x, y) + \tan\alpha}{1 - f(x, y)\tan\alpha}.$$

Betrachten Sie in Teil (e) den Sonderfall, dass gilt: $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ für $x \neq 0$, $y \neq 0$, und $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(e) (i) Zeigen Sie, dass $g(x, y) = \frac{y - x}{y + x}$ gilt. [2]

(ii) Finden Sie damit und durch Lösen der homogenen Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$ eine allgemeine Gleichung, die diese Kurvenfamilie G repräsentiert. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $h(x, y) = d$, wobei d ein Parameter ist. [9]

(f) Betrachten Sie $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \tan\alpha$ und zeigen Sie, dass für alle endlichen $f(x, y)$ gilt:

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} g(x, y) = -\frac{1}{f(x, y)}.$$ [2]